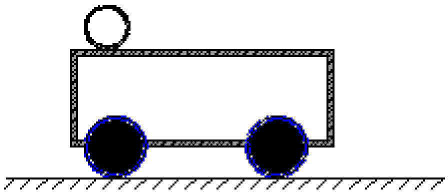
المبدأ العامة في تحريك الجملة الميكانيكية-2

د.اسكندر عمجة

التحريك

مسألة: اسطوانة تتدحرج بسرعة v من الطرف الأيسر

إلى الطرف الأيمن لسطح عربة ساكنة وزنها W_1 طولها $2h$



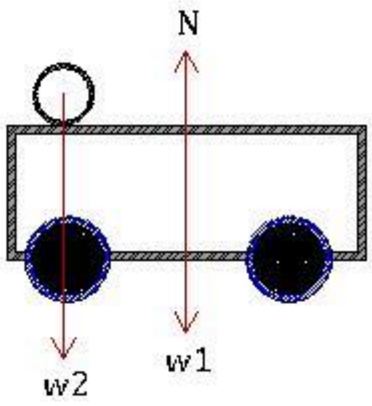
المطلوب:

1. عين مقدار سرعة العربة
2. عين انتقالها خلال حركة الاسطوانة

الحل:

علاقة سرعة العربة:

نلاحظ أن القوى المؤثرة على الجملة(عربة-اسطوانة) وهي N, W_1, W_2 عمودية على محور الحركة OX المتجه نحو اليمين بالتالي نختار علاقة تغير الطاقة الحركية للجملة.



$$\overrightarrow{Q_1} - \overrightarrow{Q_0} = \overrightarrow{I_N} + \overrightarrow{I_{W_2}} + \overrightarrow{I_{W_1}}$$

بالإسقاط على محور الحركة وباتجاه حركة الاسطوانة:

$$Q_{1X} - Q_{0X} = I_N + I_{W_1} + I_{W_1}$$

ثلاثة الدفوع تساوي الصفر

$$Q_{1X} - Q_{0X} = 0$$

لكن: $Q_{0X} = 0 \dots$

$$\Rightarrow Q_{1X} = 0$$

$$Q_{1X} = q_1 + q_2$$

تمثل سرعة العربة v_1

$$v_1 = v = ?$$

تمثل السرعة المطلقة v_2: v_2^a

$$v_2^a = v_2^r + v_2^e$$

$$v_2^r = v_2 \;,\quad v_2^e = v_1$$

بالتعويض في علاقة تغير كمية الحركة:

$$m_1 v_1 + m_2(v_2 + v_1) = 0$$

$$(m_1 + m_2)v_1 = -m_2 v_2$$

$$v_1 = -\frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

- الإشارة السالبة تدل على أن اتجاه السرعة v_1 تعاكس السرعة.
- الإشارة السالبة تدل على أن اتجاه حركة العربة تعاكس اتجاه الحركة المفروضة (اتجاه حركة الاسطوانة).

علاقة انتقال العربة:

نكتب علاقة انحفاظ الحركة للجملة بشكل:

$$m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} = 0 \dots \dots (1)$$

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 = 0 \dots \dots (2)$$

- Δx_1 تمثل انتقال مركز كتل **العربة** ويساوي إلى : $\Delta x_1 = x_{1_1} - x_{1_0} = ?$

• حيث x_{1_1} تمثل وضع احداثي مركز كتلة **العربة النهائي**.

- حيث x_{1_0}تمثل وضع احداثي مركز كتلة **العربة الابتدائي**.

- Δx_2تمثل انتقال مركز كتل **الاسطوانة** ويساوي إلى : $\Delta x_2 = x_{2_1} - x_{2_0} = ?$

- حيث x_{2_1} تمثل وضع احداثي مركز كتلة **الاسطوانة النهائي**$x_{2_1} = x_r + x_e = h + \Delta x_1$.

- حيث x_{2_0}تمثل وضع احداثي مركز كتلة **الاسطوانة الابتدائي**$x_{2_0} = -h$.

بالتعويض في (2):

$$m_1\Delta_1 + m_2[(h + \Delta x_1) - (-h)] = 0$$

$$m_1\Delta_1 + m_2 h + m_2\Delta x_1 + m_2 h = 0$$

$$(m_1 + m_2)\Delta x_1 = -2m_2 h$$

$$\Delta x = -\frac{2m_2}{m_1 + m_2}h$$

طريقة ثانية:

بإمكاننا الحصول على علاقة الانتقال للعربة بمكاملة علاقة السرعة للعربة:

$$v_1 = -\frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{m_2 . dx_2}{m_1 + m_2} . \frac{1}{dt}$$

$$dx_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} . dx_2$$

$$\int_0^{\Delta x_1} dx_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\int_{-h}^{h} dx_2$$

$$\Delta x_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}[h - (-h)] = \Delta x = -\frac{2m_2}{m_1 + m_2}h$$

العزم الحركي لجملة مادية

العزم الحركي لجملة مادية بالنسبة لنقطة O أو كمية الحركة الزاوية وهو مقدار المتجه الذي يساوي المجموع الهندسي لعزوم كميات حركات جسيمات الجملة بالنسبة للنقطة O.

$$K_0 = \Sigma m_0 = \Sigma(OM \wedge m_k V_k)$$

حيث m_0 تمثل عزم كمية حركة الجسيم M_k بالنسبة للنقطة الثابتة O.

بإسقاط العلاقة على جملة محاور إحداثية نحصل علر مركبات العزم الحركي للجملة بالنسبة للنقطة الثابتة O على المحاور الإحداثية و هي تكافئ العزوم الحركية للجملة لهذه المحاور

$$K_x = \sum m_x = \sum (OM_k \wedge m_k.V_k)i$$

$$K_y = \sum m_y = \sum (OM_k \wedge m_k.V_k)i$$

$$K_z = \sum m_z = \sum (OM_k \wedge m_k.V_k)k$$

بالتالي لتحديد المتجه K_O لابد من تعيين مساقطه على المحاور الإحداثية و كما ذكرنا أن كمية الحركة لجملة هي مميزة لحركة الجملة الانسحابية فإن العزم الحركي لجملة بالنسبة لمحور ثابت هي مميزة لحركة الجملة الدورانية

فإذا دار جسم حول محور إحداثي و ليكن OZ بسرعة زاوية ω متجهه Ω ينطبق على المحور OZ رسم كل جسيم M_k من الجسم دائراة مركزها C_k تقع على المحور OZ و نصف قطرها $(r_k = C_k M_k)$ و يكتسب الجسيم سرعة خطية $(V_k = \omega . r_k)$ تمس الدائرة و يقع متجهه في مستوي يعامد المحور OZ في النقطة C_k

إن عزم متجهه كمية حركة الجسيم $m_k.V_k$ بالنسبة للنقطة C_kمن المحور OZ هو متجه ينطبق على المحور OZ و يتجه بشكل يدور حوله المتجهه $m_k.V_k$ في الجهه المباشرة فهو يتجهه إذا باتجاه Ω وقيمته العددية:

$$m_c = m_k.V_k.r_k$$

و مسقطه على المحور OZ يساويه , و عليه:

$$m_c = m_2 = m_k.\omega.r_k^2$$

و بالتالي:

$$K_2 = \sum m_2 = \sum \omega(m_k.r_k^2) = \omega \sum m_k.r_k^2$$

و المقدار $\sum m_k.r_k^2$ يمثل عزم عطالة الجسم بالنسبة للمحور OZ أي I_2 ومنه:

$$K_2 = I_2.\omega$$

فالعزم الحركي لجملة بالنسبة لمحور Δ يدور حول هذا المحور يساوي إلى جداء عزم عطالة الجملة بالنسبة للمحور Δ بالسرعة الزاوي للدوران

و لتعين K_x نسقط المتجهه $m_k.V_k$ على المستوي OYZ أي على المحور Y_1 :

$$(m_k.V_k)_{Y_1} = m_k.V_k.\cos\alpha_1$$

و عزم هذا المتجه بالنسبة للمحور OX حيث O نقطة من المحور x نحصل على:

$$K_x = \sum -(m_k.V_k.\cos\alpha_1)z_k$$

$$K_x = -\sum m_k.\omega.r_k.z_k.\cos\alpha_1 = -\omega \sum (m_k.x_k.z_k)$$

حيث $(x_k = r_k.\cos\alpha_1)$ و المقدار المحصور بين قوسين يمثل جداء العطالة I_{xz} و الإشارة السالبة تدل على أن العزم سالب لأن اتجاه دورانه معاكس لاتجاه دوران الجسم و منه:

$$K_x = -I_{xz}.\omega$$

و نحصل على علاقة مماثلة للمقدار K_Y حيث:

$$K_x = -I_{yz}.\omega$$

بالتالي القيم K_x, K_y , K_z نحدد المتجهه K_0 على المحاور الإحداثية و كما هو واضح بشكل عام إنه لا يتجه على امتداد محور الدوران OZ كحالة خاصة إذا كان محور الدوران OZ ينطبق على محور التناظر الجسم الذي يمر من مركز كتلة و كان محور التناظر هو المحور الرئيسي لعزم عطالة الجسم بالتالي:

$$I_{xz} = I_{yz} = 0 \Rightarrow K_x = K_y = 0$$
$$K_0 = K_z = I_z.\omega$$

بالتالي في الحالة الخاصة إذا كان الجسم يدور حول محور تناظره فإن متجه العزم الحركي له بالنسبة لنقطة من محور الدوران يتجه على امتداد محور الدوران و يساوي عدديا إلى جداء عزم عطالة الجسم بالنسبة للمحور بالسرعة الزاوية للدوران

بالتالي يمكن أن نؤكد أن كمية الحركة لجملة $M.V_G$ هي مميزة للحركة الانسحابية لأن السرعة الخطية V_G مميزة هذه الحركة كذلك فإن العزم الحركي لجملة هي مميزة للحركة الدورانية حيث السرعة الزاوية ω مميزة هذه الحركة

و إذا تألفت جملة مادية من مجموعة من الاجسام تدور حول محور واحد بسرعات زاوية مختلفة $\omega_1, \omega_2, \dots . \omega_n$ كان لدينا:

$$K_z = I_{1z}.\omega_1 + I_{2z}.\omega_2 + \cdots + I_{nz}.\omega_n$$

ملاحظة:

إن كمية حركة الجملة المادية تعطي بالعلاقة:

$$Q = M.V_G$$

فالكتلة M هي من الوجهة الفيزيائية العامل الممثل لعطالة الجسم المنسحب فهو العامل الذي يقاوم انسحاب الجسم فإذا طبقنا على جملة ما قوى خارجية معينة كانت السرعة الانسحابية التي يكتسبها مركز كتل هذه الجملة متناسبا عكسيا مع كتلة هذه الجملة فالكتلة و الحال هذه تظهر و كأنها تمانع في زيادة سرعة الانسحاب فهي تمثل عامل عطالة الانسحاب

أما العزم الحركي للجملة المادية التي تدور حول محور OZ فيعطي بالعلاقة:

$$K_z = I_z.\omega$$

فعزم العطالة I_z هو من الوجهة الفيزيائية العامل الممثل لعطالة الجسم الدائر فهو العامل الذي يقام دوران الجسم فإذا طبقنا على جملة ما ازدواجا معينا كانت السرعة الزاوية التي يكتسبها الجسم في حركته الدورانية متناسبا عكسا مع عزم عطالة هذا الجسم بالنسبة لمحور الدوران فعزم العطالة و الحال هذه يظهر و كأنه يمانع في زيادة سرعة الدوران فهو يمثل عامل عطالة الدوران